SERIE N° 6 (2ème année sciences)

EXERCICE 1

Soit A, B et C trois points non alignés du plan, O = B * C.

On considère l'application f : P $\longrightarrow$ P ; M $\longmapsto$ M' tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

1. Construire A' = f(A) et B' = f(B)
2. Montrer que f est une translation de vecteur $2\,\overrightarrow{OA}$

EXERCICE 2

Le plan P étant rapporté au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, soit f l'application de P dans lui-même qui, au point M(x, y), associe le point M'(x', y') tel que $\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases}$ avec k, a et b étant trois réels donnés.

1. Pour quelles valeurs de k l'application f admet-elle un seul point invariant Ω ?
   On suppose cette condition réalisée dans la suite.
2. Montrer que f est une homothétie de centre Ω et le rapport k.
3. On suppose que k = -2, a = 6 et b = -3. Soit D la droite dont une équation est y = 2x + 1 .
   Trouver une équation de la droite D' image de D par f.

EXERCICE 3

A et B sont deux points donnés.

Soit l'application h : M $\longrightarrow$ M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$

1. Soit G le barycentre de (A, 1) et (B,-3).
   a- Montrer que G est invariant par h.
   b- En déduire que h est une homothétie de centre G et dont on précisera le rapport.
2. Soient I le milieu du segment [AB] ; E et F deux points définis par les égalités vectorielles :
   $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FE}$
   a- Déterminer h(A) et h(B).
   b- En déduire h(I).

EXERCICE 4

ABCD est un parallélogramme. Soit I, J les milieux respectifs des segments [BC] et [AD].

1. Déterminer et construire le point G barycentre de deux points pondérés (J, 1) et (I, -3).
2. Soit l'application $\begin{array}{l} f : P \to p \\ M \mapsto M' \ \ tel\ que\ \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \end{array}$
   a- Montrer que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MJ} - 6\overrightarrow{MI}$
   b- En déduire que $\overrightarrow{MM'} = 4\,\overrightarrow{GM}$
   c- Monter que f est l'homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.
   d- Déterminer et construire f(I) = I'. En déduire f((BC))

EXERCICE 5

Soit une droite Δ du plan et deux points distincts A et B n'appartenant pas à Δ.

Soit I barycentre de deux points pondérés (A, 2) et (B, 3), M un point de Δ.

Soit le point N défini par : $5\,\overrightarrow{NM} + 2\,\overrightarrow{NA} + 3\,\overrightarrow{NB} = \vec{0}$

1. Montrer que N est le milieu du segment [MI].
2. Exprimer $\overrightarrow{IN}$ à l'aide de $\overrightarrow{IM}$
3. Quelle est l'homothétie qui transforme M en N.
4. Déterminer et construire l'image de la droite (AB) par $h_{\left(I,\,\frac{1}{2}\right)}$
5. Déterminer l'ensemble des points N quand M varie sur Δ.
6. Soit le point C tel que ABC rectangle en C.
   a- Quel est l'ensemble E des points C.
   b- Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
      Quel est l'ensemble des points G quand C varie sur E.